$\sqrt{2}$ non è un numero razionale

1. Richiami: numeri pari e dispari. Un numero naturale m è pari (rispettivamente dispari) se e solo se esiste un numero naturale r tale che $m = 2r$ (rispettivamente $m = 2r + 1$).

Infatti dire che un numero naturale m è pari significa dire che è il "doppio" di un altro numero naturale o, in modo equivalente, che è divisibile per 2. In simboli: $m = 2r$ per un certo numero naturale r. Ad esempio $m = 6$ è pari ed in tal caso r vale 3, perchè $6 = 2 \times 3$. Notiamo che con la formula $m = 2r$ si ottengono tutti i numeri pari facendo variare di r fra tutti i numeri naturali: se si pone $r = 0,\ 1,\ 2$ ..., si ricavano i valori $m = 0,\ 2,\ 4$ ....

I numeri dispari sono i numeri che, divisi per 2, danno come resto 1, equivalentemente sono i successivi dei numeri pari. Entrambe queste informazioni sono racchiuse nella formula $m = 2r + 1$, che in particolare indica che il numero m è il successivo del numero pari $2r$. Ad esempio per $m = 7$ si ha $r = 3$ e $7 = 2 \times 3 + 1 = 6 + 1$ è il successivo del numero pari $2 \times 3 = 6$. Come nel caso dei numeri pari, al variare di r fra tutti i numeri naturali, con la formula $m = 2r + 1$ si ottengono tutti i numeri dispari: infatti per $r = 0,\ 1,\ 2$ ... si ricavano i valori $m = 1,\ 3,\ 5$ ....

Richiamiamo il modo attraverso cui l'addizione e la moltiplicazione operano sulla "parità" dei numeri, ossia sul loro essere pari o dispari:

2. Lemma. a) La somma di due numeri naturali pari e la somma di due numeri naturali dispari sono entrambe pari. La somma di un numero naturale pari e di uno dispari è dispari.

b) Il prodotto di due numeri naturali pari e di un numero naturale pari per uno dispari sono entrambi pari. Il prodotto di due numeri naturali dispari è un numero dispari.

Dimostrazione. Prendiamo due numeri naturali $m,\ n$.

Supponiamo dapprima che siano entrambi pari, allora possiamo scrivere: $m = 2r$ e $n = 2s$ dove $r,\ s$ sono due numeri naturali. Sommando, ricaviamo $m + n = 2r + 2s = 2(r + s)$. Abbiamo così scritto la somma $m + n$ come il doppio del numero $r + s$, quindi $m + n$ è pari. Invece, moltiplicando, si ha $mn = 2r \cdot 2s = 2(2rs)$, che è pari, perchè è il doppio di $2rs$.

Supponiamo ora che entrambi i numeri siano dispari. Questa volta scriviamo $m = 2r + 1$ e $n = 2s + 1$ con $r,\ s$ numeri naturali e si ottiene $m + n = 2r + 1 + 2s + 1 = 2(r + s + 1)$, che è pari in quanto doppio di $(r + s + 1)$, mentre $mn = (2r + 1)(2s + 1) = 4rs + 2r + 2s + 1 = 2(2rs + r + s) + 1$, che è dispari (è il successivo del numero pari $2(2rs + r + s)$)

Terminiamo con $m = 2r$ pari e $n = 2s + 1$ dispari: in tal caso $m + n = 2r + 2s + 1 = 2(r + s) + 1$ è dispari, mentre $mn = 2r(2s + 1)$ è pari.

3. Osservazione. Dal risultato precedente si ricava come caso particolare, che il quadrato di un numero pari é anch'esso sempre pari, mentre il quadrato di un numero dispari è sempre dispari e quindi possiamo affermare che

> se il quadrato di un numero naturale è pari, allora anche il numero stesso è pari

4. Teorema. $\sqrt{2}$ non è un numero razionale.

Dimostrazione. La dimostrazione procede per "assurdo": supporremo che la tesi sia falsa (ossia che sia falsa la proposizione "$\sqrt{2}$ non è un numero razionale"), quindi supporremo vera la sua negazione. Occorre fare attenzione: la tesi è espressa con una proposizione che contiene una negazione, quindi la sua negazione è una proposizione complessa anche linguisticamente, perchè contiene una doppia negazione. Possiamo renderla in questo modo:

non è vero che $\sqrt{2}$ non è un numero razionale

Quest'ultima, "elidendo" le due negazioni, equivale[1] a

$\sqrt{2}$ è un numero razionale

Supponiamo quindi che $\sqrt{2}$ sia un numero razionale e cerchiamo di trovare una "contraddizione" fra questa affermazione, o fra qualcuna delle proposizione dedotte tramite essa, con qualche altra proposizione che sappiamo essere vera o perchè è stata assunta come "assioma" o perché è un risultato vero e già dimostrato.

Stiamo supponendo di poter scrivere $\sqrt{2}$ come una frazione: ossia $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ con $a,\ b$ numeri interi positivi (ricordiamo che $\sqrt{2} > 0$). Inoltre se abbiamo trovato tale frazione con $a,\ b$ entrambi divisibili per 2 , dividendoli per 2, otteniamo una frazione equivalente a $\frac{a}{b}$, quindi sempre uguale a $\sqrt{2}$. Se ancora numeratore e denominatore della nuova frazione sono entrambi pari, possiamo ripetere di nuovo la divisione per 2 e così via, finchè non otteniamo una frazione in cui numeratore e denominatore non sono entrambi divisibili per 2, ossia non sono entrambi pari[2]. In questo modo abbiamo dimostrato che se supponiamo vero che $\sqrt{2}$ sia un numero razionale, allora possiamo anche scrivere

$$\sqrt{2} = \frac{m}{n}$$

[1] Nel linguaggio comune negare la negazione di una proposizione non sempre equivale esattamente ad affermare la proposizione stessa. Ad esempio la frase: "Non è vero che non voglio invitare Giovanni alla mia festa di compleanno", può avere un significato (anche molto) diverso da: "Voglio invitare Giovanni alla mia festa di compleanno".

[2] Ricordiamo che, di più, con lo stesso procedimento è possibile fare in modo che numeratore e denominatore non abbiano fattori comuni: una frazione di questo tipo si dice "ridotta ai minimi termini".

con m, n numeri interi positivi, di cui **almeno uno dei due deve essere dispari**.

Eleviamo al quadrato entrambi i membri dell'uguaglianza precedente e otteniamo la nuova uguaglianza[3]

$$2 = \frac{m^2}{n^2}$$

che si trasforma in

$$m^2 = 2n^2$$

Questa mostra che m^2 è un numero pari (è il doppio di un altro numero), ma allora, per quanto visto nel'osservazione 3, anche m **deve essere pari**.

Quindi possiamo scrivere $m = 2r$, che, sostituita nell'ultima uguaglianza, comporta $4r^2 = 2n^2$ e questa si semplifica in

$$n^2 = 2r^2$$

Ancora in modo del tutto analogo a prima otteniamo che anche n^2 e quindi anche n **è un numero pari**.

Facciamo il punto della situazione. Abbiamo supposto che $\sqrt{2}$ sia un numero razionale e abbiamo dimostrato che, in questo caso, possiamo scrivere $\sqrt{2}$ come una frazione con **numeratore e denominatore che non sono entrambi pari**. D'altra parte abbiamo fatto vedere, mediante alcuni passaggi algebrici corretti, che quest'ultima frazione, se é uguale a $\sqrt{2}$, ha necessariamente **numeratore e denominatore entrambi pari**. Abbiamo così trovato una "contraddizione" fra due affermazioni. Tale contraddizione è sorta dall'aver supposto arbitrariamente che $\sqrt{2}$ fosse un numero razionale: dobbiamo quindi accettare la sua negazione, che è proprio la tesi del teorema.

[3] Un buon esercizio per tutti consiste nel verificare che tutti i "passaggi algebrici" effettuati qui e in seguito sono corretti.

5. Esercizio. Dimostrare che i numeri seguenti non sono razionali

a. $\sqrt{8}$ b. $\sqrt{18}$ c. $\sqrt{32}$ d. $\sqrt{50}$

Le asserzioni seguono dal fatto che $\sqrt{2}$ non è razionale. Mostriamo ad esempio che $\sqrt{18}$ non è razionale. Infatti se fosse razionale, potremmo scriverlo come una frazione $\sqrt{18} = \frac{m}{n}$ con $m,\ n$ numeri interi. Ma $18 = 9 \times 2 = 3^2 \times 2$ quindi $\sqrt{18} = \sqrt{3^2 \times 2} = 3\sqrt{2}$[4]. Allora $\sqrt{18} = \frac{m}{n}$, diventerebbe $3\sqrt{2} = \frac{m}{n}$ e quindi $\sqrt{2} = \frac{m}{3n}$ sarebbe a sua volta un numero razionale. In modo analogo si affrontano gli altri casi. Più in generale vale il seguente:

6. Corollario. $\sqrt{2h^2}$ non è razionale , qualunque sia h numero naturale arbitrario $h \geq 1$.

Dimostrazione. Come nell'esercizio 5 si suppone per assurdo che $\sqrt{2h^2}$ sia razionale, ossia che si possa scrivere $\sqrt{2h^2} = \frac{m}{n}$ con $m,\ n$ numeri interi. Adesso si ha: $\sqrt{2h^2} = h\sqrt{2}$. Allora $\sqrt{2h^2} = \frac{m}{n}$, diventerebbe $h\sqrt{2} = \frac{m}{n}$ e quindi otterremmo che $\sqrt{2} = \frac{m}{hn}$ sarebbe un numero razionale.

7. Problema (più difficile, ma "istruttivo"). $\sqrt{3}$ non è un numero razionale.

Commento. Il teorema 4 è stato presentato come un "prodotto finito", corredato da un lemma, osservazioni, esercizi, un corollario ... in un determinato ordine, secondo uno stile espositivo molto comune in matematica. Si cerchi ora di procedere iniziando, come nella dimostrazione del teorema, con lo scrivere $\sqrt{3}$ come una frazione. Ci si dovrebbe così rendere conto che questa volta si ha bisogno di poter disporre di un risultato ausiliario analogo, ma diverso da quello enunciato nell'osservazione 3:

> se il quadrato di un numero naturale è divisibile per 3, allora il numero stesso è ancora divisibile per 3

[4] Può essere utile ricordare che vale $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$ per ogni $a,\ b \geq 0$.

(nonchè della possibilità di scrivere ogni frazione in modo che numeratore e denominatore non siano entrambi divisibili per 3).

E' opportuno provarci anche se non ci si riesce fino in fondo. Potrebbe essere un esempio delle modalità e delle difficoltà di una parte del lavoro che si compie in matematica: cercare di estendere un risultato (e le strategie utilizzate per dimostrarlo) da un caso noto ad uno solo "congetturato". Inoltre ci si potrebbe rendere conto di come, spesso, l'ordine con il quale i risultati vengono esposti e che risponde ad esigenge di natura logica, espositiva e didattica, non coincide con quello che si è delineato effettivamente, mentre il problema veniva risolto. Spesso infatti nell'esposizione finale non solo non viene menzionato nessuno dei (numerosi) tentativi infruttuosi e degli "errori" compiuti, ma anche l'ordine viene totalmente modificato: ad esempio i risultati ausiliari chiamati "lemmi" di solito anteposti nell'esposizione finale al teorema, frequentemente emergono solo contemporaneamente ai tentativi di dimostrazione del teorema stesso, mentre si cerca di "spezzare" il problema in problemi più semplici e la loro dimostrazione si cerca parallelamente (o addirittura in seguito) a quella del teorema.

8. Esercizio. Come in 5 e in 6, utilizzando il fatto che $\sqrt{3}$ non è razionale, dimostrare che non sono razionali neppure i numeri

a. $\sqrt{12}$ b. $\sqrt{27}$ c. $\sqrt{3h^2}$, dove h é un numero naturale arbitrario $h \geq 1$

9. Problema (ancora più difficile, ma sempre "istruttivo"). Per ogni numero primo p, $\sqrt{p}$ è un numero irrazionale.

Commento. E' ancora più difficile del problema 7. Più semplice è cercare di delineare nel modo più dettagliato possibile, un'ipotetica strategia risolutiva, in analogia a quanto scritto nel commento al problema precedente. Anche in questo caso siamo di fronte a un processo usuale in matematica: cercare di generalizzare un risultato (e le strategie utilizzate per dimostrarlo) da alcuni casi noti (in questo caso $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$) ad un'intera classe (le radici quadrate dei numeri primi) di cui i precedenti sono casi particolari. Il risultato ausiliario cercato potrebbe essere di

questo tipo:

> se il numero primo p divide il quadrato di un numero naturale, allora p divide anche il numero stesso

10. Esercizio. Come negli esercizi precedenti dimostrare che, fissato un numero primo p, non sono razionali i numeri

a. $\sqrt{2^2 p}$ b. $\sqrt{3^2 p}$ c. $\sqrt{h^2 p}$, con h numero naturale positivo arbitrario